数理解析研究所講究録
201巻 1974年 2-5

Heckeの予想について

京大理　土方弘明

1. $\Gamma_0(N) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, c \equiv 0 \bmod N \right\}$ とする。1936年に、Heckeは"(Nを素数として、weight 2, Haupt typusの) $\Gamma_0(N)$ の modular form は全て、level N の 2次形式から作る theta 級数の一次結合として表せるだろう"と予想した(cf. Hecke: Analytische Arithmetik positiven quadratischen Formen, Kgl. Danske, Vid. Selskab. (12) 1940, p.100〜).

2. 1955年、Eichlerによって、その予想は証明された。(Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen, Crelle, (195) 1955, p157−). 同時に、彼はNが素数でないと、上の予想は一般には成立しないことを示した。そして、Nがsquare freeという仮定の下に、次のような(一寸みると奇妙な)命題を証明した。cf. 上に引用したもの、及び

Quadratische Formen und Modulfunktionen, Acta Arith. (4) 1958, p217~). 後者ではweight 2 以上を扱っているが, 簡単のため, 以下ではそれにふれない。

“ $f(\tau)$ を $\Gamma_0(N)$ の cusp form として, そのフーリエ展開 at ∞ を $f(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau}$ とする. このとき次の2性質を充す $\Gamma_0(N)$ の cusp form $g(\tau)=\sum b_n e^{2\pi i n\tau}$ が存在する。

(i) $g(\tau)$ は level N 以下の2次形式から得られる theta 級数の一次結合

(ii) $(n, N)=1$ なら $a_n = b_n$ 。”

即ち, “level と素でない n を無視すると, theta で書ける” というのである。

3. N が素でないと Hecke 予想(の拡張)が成立しないのは割合簡単な理由による. M を N の約数, d を N/M の約数 $(d\neq 1)$ とすると, $\Gamma_0(M)$ の cusp form f は自然に $\Gamma_0(N)$ の cusp form とみられるが, 更に $f(d\tau)$ も $\Gamma_0(N)$ の cusp form となり, こういう $f(d\tau)$ は(其フーリエ級数がとびとびにしかないので theta で表せそうもないが)実際, theta では表せない。

4. Atkin-Lehner は $\Gamma_0(N)$ の cusp form f が <u>new form</u> であるというのを次によって定義した.

4

(i) $f(\tau)$ は $\Gamma_0(M)$ $(M|N)$ の cusp form $h(\tau)$ 及その transform $h(d\tau)$ $(d\,|\,\frac{N}{M})$ で生成される部分空間の orthogonal complement に入る

(ii) $f(\tau)$ は Hecke 作用素 T_n $((n,N)=1)$ の同時固有函数である.

そして彼等は $\Gamma_0(N)$ の cusp form の空間は $\Gamma_0(M)$ $(M|N)$ の new form $h(\tau)$ 及その transform $h(d\tau)$ $(d\,|\,\frac{N}{M})$ で張られることを示した. (cf. Hecke Operators on $\Gamma_0(m)$ Math. Ann (185) 1970)

5. このように 3, 4 を並べてみれば, Nが合成数のとき $\Gamma_0(N)$ の new form は theta で書けるか? というのが真の問題であることに気づく. これができれば一般の cusp form は theta とその(上のような簡単な) transform の一次結合でかける. これが最近, 私と斎藤裕君とで考えた問題であり, 答はまさに, その通りであった. 実際三宅敏恒君の注意により 2.で, f を new form と仮定しさえすれば, $f = g$ と結論できる.

さらに我々は Eichler の証明法 (Hecke 作用素の cusp form の空間での trace と Brandt Matrix の trace を比べる) を new form の観点でまとめ直すことによって次のように改良できる.

6. 2の(i)の N以下 を 丁度 N のもの (一般には更にその一部) に限れる.

7. 私の(N が square free と限らない) trace formula (U.S.-Japan Sem. Modern Method in Number theory 1971 に発表) の定性的部分を使うことによって, N が square free の仮定を N がすくなくとも一つ simple prime factor をもつ i.e. $\exists p,\ N=pN',\ (p,N')=1$ p 素. でかえることができる.

8. 6, 7 の証明には, theta の方にも new form (の生成する subspace) に当るものを定義することが essential である. 今迄述べた外見上には全く現われなかったが, 実際には $\Gamma_0(N)$ がその単数群(の index 2 の部分群)になっているような($\mathbb{Q}$ 上の algebra $M_2(\mathbb{Q})$ の) order, 及び (ある意味でそれに対応して決る) $\mathbb{Q}$ 上の definite quaternion の order の しかもその(数論的意味での)局所的性質が essential である.

9. N が square free の仮定を落すには, すくなくとも今迄扱われている $\Gamma_0(N)$ 型以外の order の局所理論が必要である.